Kompensationsprüfung zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik

1 Grundlagen

Informationen zu den **rechtlichen Grundlagen** finden Sie im Dokument *Mündliche Kompensationsprüfung – Relevante Auszüge aus Gesetzen und Verordnungen*, abrufbar unter https://www.bifie.at/node/2314.

1.1 Allgemeines

Die mündliche Kompensationsprüfung in Mathematik bietet die Möglichkeit, die negative Beurteilung der schriftlichen Klausur im Rahmen desselben Termins zu kompensieren und damit einen Laufbahnverlust zu vermeiden.

Im Rahmen dieser Kompensationsprüfung müssen diejenigen Kompetenzen nachgewiesen werden, die zentrales Element der schriftlichen Überprüfung sind. Für das Fach Mathematik an AHS bedeutet dies, dass die Kandidatinnen und Kandidaten bei dieser Prüfung mathematische Grundkompetenzen nachweisen müssen. Als Grundlage dafür ist der Grundkompetenzenkatalog für die standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung in Mathematik (vgl. BIFIE, 2013) heranzuziehen, in dem explizit die notwendigen Grundkompetenzen ausgewiesen sind.

Der Kommunikation mit der Prüferin/dem Prüfer (Expertinnen und Experten, vgl. BIFIE, 2013) kommt bei dieser mündlichen Prüfung eine entscheidende Rolle zu. Durch eine eigenständige Präsentation der Lösung des Grundkompetenzanteils der Fragestellung muss die Kandidatin/der Kandidat nachweisen, dass die entsprechende Grundkompetenz beherrscht wird. Die in den Aufgaben angeführten Leitfragen (vgl. Abschnitt 2.1) dienen dazu, den Kandidatinnen und Kandidaten eine zusätzliche Gelegenheit zu geben, ihre Kommunikationsfähigkeit in Bezug auf mathematische Kompetenzen unter Beweis zu stellen. Dieser Teil der Fragestellung wird in der Prüfungssituation dialogisch behandelt. Die Leitfragen sind somit inhärenter Bestandteil der Kompensationsprüfung und werden der Prüfungskandidatin/dem Prüfungskandidaten gleichzeitig mit der Aufgabenstellung vorgelegt.

2 Konzeption der Kompensationsprüfung

Die Aufgabenstellung in einem Aufgabenpaket besteht aus fünf voneinander unabhängigen Aufgaben. Diese sind jeweils in zwei Arbeitsaufträge gegliedert. Die zugehörigen Lösungen werden den Prüferinnen und Prüfern jeweils mit Beginn der ersten Vorbereitungszeit einer Aufgabenstellung zur Kenntnis gebracht.

In der Vorbereitungszeit und bei der Prüfung sind die gewohnten Hilfsmittel zulässig.

2.1 Charakterisierung der Aufgaben

Die Aufgaben für die Kompensationsprüfung werden auf Basis des Grundkompetenzenkatalogs erstellt. Bei jeder Prüfung werden alle vier Inhaltsbereiche (vgl. BIFIE, 2013) abgedeckt; daher entsprechen die Aufgaben dem Typus der Grundkompetenzaufgaben. Bei diesen Aufgaben sind kompetenzorientiert (Grund-)Wissen und (Grund-)Fertigkeiten nachzuweisen. Zusätzlich ist bei jeder Aufgabe eine sogenannte *Leitfrage* formuliert, die inhaltlich und thematisch Bezug auf die Grundkompetenzen des jeweiligen (der Aufgabe entsprechenden) Inhaltsbereichs nimmt.

Durch die mündliche Prüfungssituation kommt der Kommunikation über mathematische Inhalte eine entscheidende Rolle zu. Es ist unbedingt erforderlich, dass die Kandidatinnen und Kandidaten auch ohne entsprechende Leitung durch die Prüferin/den Prüfer ihre Bearbeitung der Aufgaben zu den Grundkompetenzen ausführlich präsentieren können.

Durch die Leitfrage wird es ermöglicht, die im Inhaltsbereich vorhandenen Grundkompetenzen ausführlicher zu reflektieren. Daher findet sich für die Prüferin/den Prüfer ein eigener Hinweis auf ihrem/seinem Prüfungsbogen, welcher explizit macht, ab wann die Leitfrage als gelöst angesehen werden kann. So wird sichergestellt, dass die Kandidatinnen und Kandidaten nicht nur auswendig gelerntes Wissen „zur Schau stellen", sondern die mathematischen Inhalte tatsächlich verständig und reflektiert wiedergeben können. Kandidatinnen und Kandidaten, die in dieser Prüfungssituation mit der Prüferin/dem Prüfer *nicht* in kommunikativen „Austausch" treten und ihre Überlegungen *nicht* unter korrekter Verwendung der Fachsprache im Grundkompetenzbereich ausführlich darlegen, kann die entsprechende Kompetenz nicht bescheinigt werden.

Für die Kompensationsprüfung ist somit ein eigener Aufgabentyp geschaffen. Es scheint in diesem Fall sinnvoll zu sein, als Antwortformat ausschließlich offene Formate zur Prüfung zuzulassen, da geschlossene Antwortformate das Sprechen und Reflektieren über Mathematik in mündlichen Prüfungssituationen kaum/wenig unterstützen. Darüber hinaus ermöglichen offene Antwortformate, dass die Kandidatinnen und Kandidaten mathematische Grundkompetenzen in Anwendungssituationen identifizieren und ausführen können.

Dieser neu geschaffene Aufgabentypus ist also einerseits *verfahrensbasiert* (im Grundkompetenzteil) konzipiert, sodass die Bearbeitung eine direkte Anwendung eines (Standard-)Verfahrens verlangt, und andererseits – im Bereich der Leitfrage – *verfahrensbildend* konzipiert, sodass die Kandidatinnen und Kandidaten Strategien reflektiert wiedergeben bzw. darstellen müssen (vgl. Rüede, 2012).

2.2 Didaktischer Hintergrund

In einer mündlichen Prüfung kommt den reflektierenden Aspekten und dem Kommunikationsaspekt eine entscheidende Rolle zu. Es findet eine direkte Kommunikation mit zumindest einer Expertin/einem Experten statt. Daher spielen die fachlichen, aber auch die überfachlichen Fähigkeiten der Kandidatinnen und Kandidaten eine zentrale Rolle. Dies soll im Folgenden näher erläutert werden.

Unter den fachlichen Aspekten werden insbesondere vor dem Hintergrund des Konzepts zur schriftlichen Reifeprüfung das *Wissen* und das *Anwenden von Wissen* verstanden, was durch die Formulierung in den Grundkompetenzen deutlich zum Ausdruck kommt. Daher ist auch dem Verstehen mathematischer Zusammenhänge und dem Verstehen von mathematischen Inhalten/Bedeutungen in dieser Situation besondere Bedeutung beizumessen.

Um diesem fachlichen Anspruch gerecht zu werden, müssen jedenfalls überfachliche Bereiche bedient werden können, insbesondere die Kommunikation mit und über Mathematik und die Präsentation des

Prozesses der Ergebnisfindung. Aus diesem Grund ist jeder Aufgabe eine sogenannte *Leitfrage* zugeordnet, die sicherstellen soll, dass im Rahmen der dahinter befindlichen Grundkompetenz dieser Kommunikations- und Präsentationsanlass ernst genommen wird und die Prüfung sich nicht ausschließlich auf die Darstellung/Präsentation der Ergebnisse konzentriert.

Dies erfordert jedoch auch von der Prüferin/vom Prüfer eine entsprechende Identifikation mit der Prüfungssituation, da jedenfalls auf vorformulierte Fragen eingegangen werden muss, nachgefragt werden soll und mit der Kandidatin/dem Kandidaten ein intensives Prüfungsgespräch geführt werden muss. Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen ihre Ergebnisse sowohl im Überblick als auch prägnant darstellen und veranschaulichen können.

So wird in dieser Prüfungssituation ein sinnvolles Zusammenwirken der fachlichen und überfachlichen Aspekte dadurch erreicht, dass Grundkompetenzen dahingehend nachzuweisen sind, vorgegebene Aufgaben zu untersuchen und zu bearbeiten sowie deren Ergebnisse zu bewerten, sodass sinnvolle/nützliche Aussagen über die Lösung bzw. Lösungswege erfolgen können.

Die Kandidatinnen und Kandidaten können somit im Rahmen der Kompensationsprüfung den Nachweis von fachlichem Wissen und der Fähigkeit, dieses angemessen darzustellen, erbringen. Weiters müssen neben der fachlichen Leistung auch die Transferfähigkeit, die Kommunikationsfähigkeit und die Methodenkompetenz unter Beweis gestellt werden.

3 Beurteilung

3.1 Gesamtbeurteilung

Da sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit für die Gesamtbeurteilung herangezogen werden, kann die Gesamtbeurteilung nicht besser als „Befriedigend" lauten.

3.2 Erläuterungen zur Beurteilung

Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen über den Nachweis der jeweiligen Grundkompetenz hinaus durch die kommunikativen Elemente in der mündlichen Prüfungssituation entsprechende Reflexionsaspekte nachweisen. Jede Aufgabe bzw. jede Leitfrage stellt einen Indikator[1] für die Erfüllung der Anforderungen gemäß LBVO dar.

Für das Beurteilungsschema ergeben sich aus den Aufgabentypen nachfolgend dargestellte Minimalanforderungen, welche LBVO-konform (analog zur schriftlichen Reifeprüfung) umgesetzt werden.

Es muss allen Beteiligten verständlich sein, dass die bloße Angabe/Ausführung eines korrekten Ergebnisses nicht automatisch die Erfüllung eines Grundkompetenzen-Indikators (GK-Indikator; vgl. unten) bedeutet. Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen jedenfalls bereits bei ihren jeweiligen Ausführungen die ent-

[1] Das Beurteilungsmodell in Mathematik (AHS) sieht derzeit durchwegs einen Punkt je Leitfragenindikator vor.

sprechende Kompetenz unter Beweis stellen und ihren beschrittenen Weg kommunikativ korrekt beschreiben können. Die bloße (auswendige) Wiedergabe genügt nicht. Somit ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Indikatoren
„Genügend“	4 GK-Indikatoren + 0 Leitfragenindikatoren 3 GK-Indikatoren + 1 Leitfragenindikator
„Befriedigend“	5 GK-Indikatoren + 0 Leitfragenindikatoren 4 GK-Indikatoren + 1 Leitfragenindikator 3 GK-Indikatoren + 2 Leitfragenindikatoren
„Gut“	5 GK-Indikatoren + 1 Leitfragenindikator 4 GK-Indikatoren + 2 Leitfragenindikatoren 3 GK-Indikatoren + 3 Leitfragenindikatoren
„Sehr gut“	5 GK-Indikatoren + 2 Leitfragenindikatoren 4 GK-Indikatoren + 3 Leitfragenindikatoren

Begriffserklärung:

- GK-Indikator (Grundkompetenzen-Indikator):
  Die Strukturierung in diesem ersten Teil der Aufgabenstellung folgt dem Grundkompetenzenkatalog.

- Leitfragenindikator:
  Der Leitfragenindikator dient zur Vertiefung im jeweiligen Inhaltsbereich. Dabei müssen die Kandidatinnen und Kandidaten unter Beweis stellen, dass sie in der Lage sind, reflektiert mit Grundkompetenzen umzugehen.

  Die Fragestellungen sind dabei eher allgemein gehalten und stehen mit der vorangegangenen Grundkompetenz in Beziehung, sodass im Rahmen der mündlichen Prüfung der Kommunikation mit Expertinnen und Experten Rechnung getragen werden kann. Hier wird deutlich, dass die Kandidatin/der Kandidat die Grundkompetenzen verständig und reflektiert interpretieren und sie ggf. in einem breiteren Zusammenhang anwenden kann.

  Um deutlich zu machen, welche Aspekte jedenfalls angesprochen werden können, um dem Prüfungsgespräch eine entsprechende Richtung zu verleihen, werden den Prüferinnen und Prüfern notwendige Hinweise mitgeliefert. Dies erscheint unabdingbar, um die den Beispielen zugrunde liegenden Ideen (inklusive Grundkompetenzen) auch entsprechend transparent darzustellen.

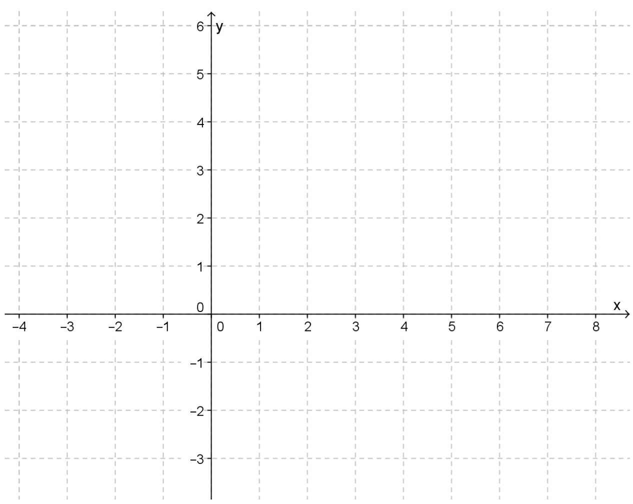
Da die gesetzliche Regelung vorsieht, dass der Prüferin/dem Prüfer und der Beisitzerin/dem Beisitzer bei der Beurteilung des Prüfungsgebiets eine gemeinsame Stimme zukommt (vgl. Dokument *Mündliche Kompensationsprüfung – Relevante Auszüge aus Gesetzen und Verordnungen*, abrufbar unter https://www.bifie.at/node/2314), erhalten beide stets die den Aufgabenstellungen beigelegten Beurteilungsraster.

4 Prototypische Aufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-1|3)$ und $B = (1|1)$, durch die eine Gerade g festgelegt ist.

Aufgabenstellung:



Zeichnen Sie die Gerade g im obigen Koordinatensystem ein und geben Sie die Gleichung der Geraden g in Parameterform an! Beschreiben und erläutern Sie dabei konkret Ihre Vorgangsweise und begründen Sie Ihre Überlegungen!

Leitfrage für die Kandidatin/den Kandidaten:

Geben Sie weitere Darstellungsformen der Geraden g an und erläutern Sie diese!

Hinweise zur Leitfrage für Lehrer/innen:

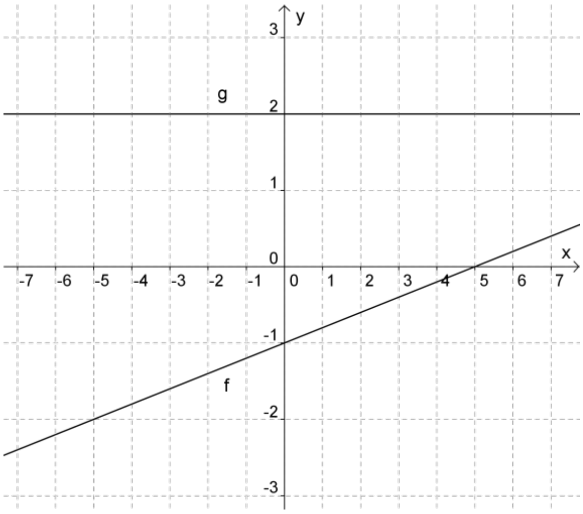
Es sollen bei der Beantwortung der Leitfrage jedenfalls die nachfolgend aufgelisteten Aspekte besprochen werden:

Geradendarstellungen im $\mathbb{R}^2$:

- Neben der Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ können Geraden auch in der expliziten Form ($y = kx + d$), in der impliziten Form ($ax + by = c$) und in der Normalvektorform ($\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$) angegeben werden.
- Aus dem Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$ einer in Parameterform gegebenen Geraden können die Normalvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -y_r \\ x_r \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} y_r \\ -x_r \end{pmatrix}$ gewonnen werden. Mithilfe dieser Normalvektoren und eines Punktes P der Geraden g kann eine weitere Geradendarstellung, nämlich die Normalvektorform, ermittelt werden, die dann auch der impliziten Darstellung ($ax + by = c$) entspricht. Das Kürzen bzw. Erweitern eines Richtungsvektors bzw. Normalvektors ist im Zusammenhang mit den Geradendarstellungen erlaubt.
- Aus der impliziten Form ($ax + by = c$) kann ein Normalvektor dieser Geraden mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ unmittelbar abgelesen werden.
- Für die explizite Form $y = kx + d$ kann beispielsweise über den Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}$ die Steigung k der Geraden ermittelt werden.

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Graphen zweier linearer Funktionen *f* und *g*.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen für *f* und *g* und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage für die Kandidatin/den Kandidaten:

Der Graph einer linearen Funktion *h* mit der Funktionsgleichung $h(x) = k \cdot x + d$ wird an der *x*-Achse und an der *y*-Achse gespiegelt.

Erklären Sie anhand der Graphen von *f* und *g*, wie sich dabei die Parameter *k* und *d* verändern!

Hinweise zur Leitfrage für Lehrer/innen:

Es sollen bei der Beantwortung der Leitfrage jedenfalls die nachfolgend aufgelisteten Aspekte besprochen werden:

Spiegelung an der *x*-Achse:

f: Bei *k* und *d* ändert sich das Vorzeichen.

g: *k* bleibt gleich, bei *d* ändert sich das Vorzeichen.

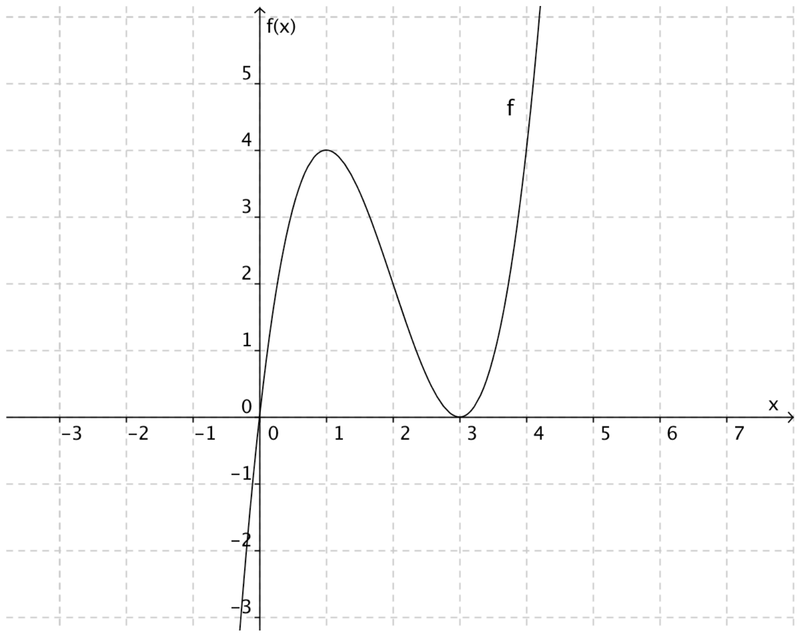
Spiegelung an der *y*-Achse:

f: Bei *k* ändert sich das Vorzeichen, *d* bleibt gleich.

g: *k* und *d* bleiben gleich.

Aufgabe 3:

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades.



Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in die obige Abbildung ein!

Beschreiben und erläutern Sie dabei konkret Ihre Vorgangsweise und begründen Sie Ihre Überlegungen ausführlich!

Leitfrage für die Kandidatin/den Kandidaten:

Beschreiben Sie allgemein den Zusammenhang zwischen den Graphen einer Polynomfunktion f und der entsprechenden Ableitungsfunktion f' anhand charakteristischer Stellen bzw. Bereiche! Begründen Sie dabei mithilfe der Eigenschaften von Polynomfunktionen und entsprechender Ableitungsregeln, wie die Anzahl der Extrempunkte und Wendepunkte einer Funktion f mit ihrer Ableitungsfunktion f' zusammenhängt!

Hinweise zur Leitfrage für Lehrer/innen:

Es sollen bei der Beantwortung der Leitfrage jedenfalls die nachfolgend aufgelisteten Aspekte besprochen werden:

– Ganz allgemein gibt es zwischen dem Graphen einer Polynomfunktion f und dem Graphen der entsprechenden Ableitungsfunktion f' folgende Zusammenhänge:
  - Der Grad der Ableitungsfunktion f' ist stets um 1 niedriger als der Grad der Polynomfunktion f. Für die Graphen bedeutet dies: Ist f eine Polynomfunktion 3. Grades, dann ist f' eine Polynomfunktion 2. Grades usw. Diese Reduzierung des Grades wirkt sich auf die Anzahl der möglichen Nullstellen aus.

- Die Nullstellen einer Ableitungsfunktion f' geben die möglichen Stellen der lokalen Extrempunkte an. Für eine Polynomfunktion 3. Grades bedeutet das, dass sie höchstens zwei Extremstellen haben kann.
- Die Extremstellen der Ableitungsfunktion f' sind diejenigen Stellen, an denen f einen Wendepunkt hat.
- Zudem kann mithilfe des Vorzeichens von f' eine Aussage über die Monotonie der Funktion f gemacht werden. Ist $f' > 0$ in einem Intervall, dann ist die Funktion f in diesem Intervall streng monoton steigend, ist $f' < 0$ in einem Intervall, dann ist die Funktion f in diesem Intervall streng monoton fallend.

– Ableitungsregeln für Polynomfunktionen

- Für das Ableiten von Polynomfunktionen gelten die Potenz-, die Summen- und die Differenzregel sowie die Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$.
- Diese Ableitungsregeln bewirken, dass der Grad der Ableitungsfunktion um 1 niedriger als der Grad der Polynomfunktion f ist, die Reduktion wirkt sich auf die mögliche Anzahl der Nullstellen von f' und f'' und damit auf die Anzahl möglicher Extrem- und Wendestellen der Funktion f aus.

Aufgabe 4:

In einem Betrieb erhalten die Angestellten folgende Monatsgehälter (in €):

2 300, 2 550, 2 450, 2 650, 2 150, 2 500, 2 400, 2 500, 2 100

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie Modus, arithmetisches Mittel und Median der Monatsgehälter und erklären Sie den Unterschied zwischen diesen Kennwerten!

Leitfrage für die Kandidatin/den Kandidaten:

Wie ändern sich arithmetisches Mittel, Median und Standardabweichung der Monatsgehälter, wenn jede/jeder Angestellte eine Gehaltserhöhung um denselben Fixbetrag erhält? Wie ändern sich diese Kennwerte, wenn ein neuer Mitarbeiter mit einem Gehalt von € 2 400 eingestellt wird? Begründen Sie Ihre Antworten, ohne die angeführten Kennzahlen neu zu berechnen!

Hinweise zur Leitfrage für Lehrer/innen:

Es sollen bei der Beantwortung der Leitfrage jedenfalls die nachfolgend aufgelisteten Aspekte besprochen werden:

- Bei einer konstanten Gehaltserhöhung (um € a) erhöhen sich das arithmetische Mittel und der Median um diesen Wert a.
  Die Standardabweichung bleibt gleich, da sich die absoluten Abweichungen der Gehälter vom arithmetischen Mittel nicht ändern.
- Das Gehalt des neuen Mitarbeiters entspricht dem arithmetischen Mittel, wodurch sich dieses nicht ändert.
  Die Standardabweichung wird geringer, da die mittlere Abweichung der Gehälter vom arithmetischen Mittel kleiner wird.
  Der Median sinkt, weil das neue Gehalt unter dem ursprünglichen Median von € 2 450 liegt und weil der neue Median nun daher als arithmetisches Mittel von 2 450 und einer kleineren Zahl (€ 2 400 oder das neue Gehalt) gebildet werden muss.

5 Konzepterstellungsgruppe

Gottfried Gurtner, Schulverein der Kreuzschwestern Linz

Eva Sattlberger, BIFIE Wien

Hans-Stefan Siller, Universität Koblenz-Landau (Projektleitung)

Evelyn Süss-Stepancik

Günther Vormayr, Landesschulrat für Oberösterreich

6 Literatur

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2013). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen.* Wien. Verfügbar unter https://www.bifie.at/node/1442 [11.03.2013].

Rüede, C. (2012). Strukturierung eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. In *JMD* 33/1. S. 113–141.

Prototypisches Prüfungspaket* zur Kompensationsprüfung zur standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mathematik

Angabe für Prüfer/innen

* Es handelt sich hier um die Angabe für Prüfer/innen; die Angabe für Kandidatinnen und Kandidaten enthält nur die Aufgabenstellungen.

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen
Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Gleichungssystem

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem mit den Variablen x und y und dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

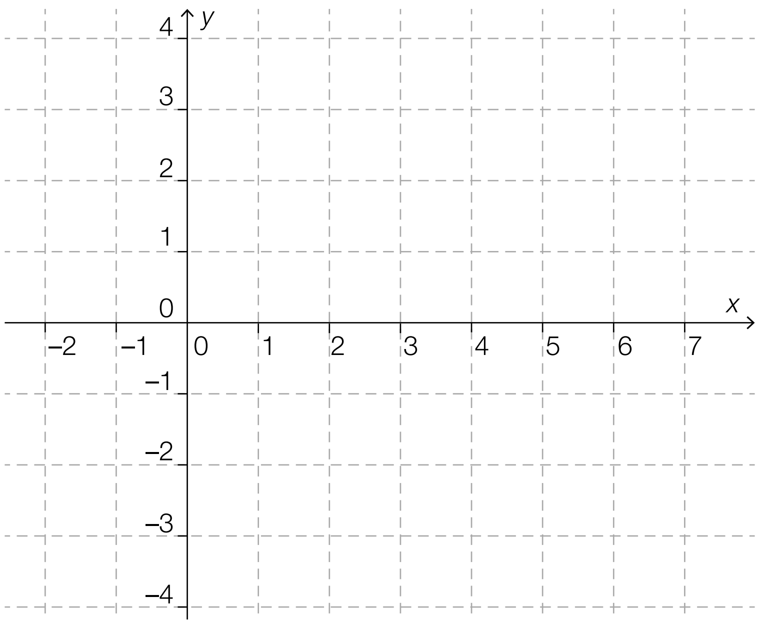
f: $4x - 6y = 12$
g: $a \cdot x + 3y = -6$

Aufgabenstellung:

Geben Sie denjenigen Wert / diejenigen Werte des Parameters a an, für den/die das Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, und berechnen Sie diese Lösung!

Leitfrage:

Stellen Sie die gegebene Gerade f graphisch dar und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a auf den Verlauf der Geraden g und auf die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems!



Lösung der Aufgabe 1

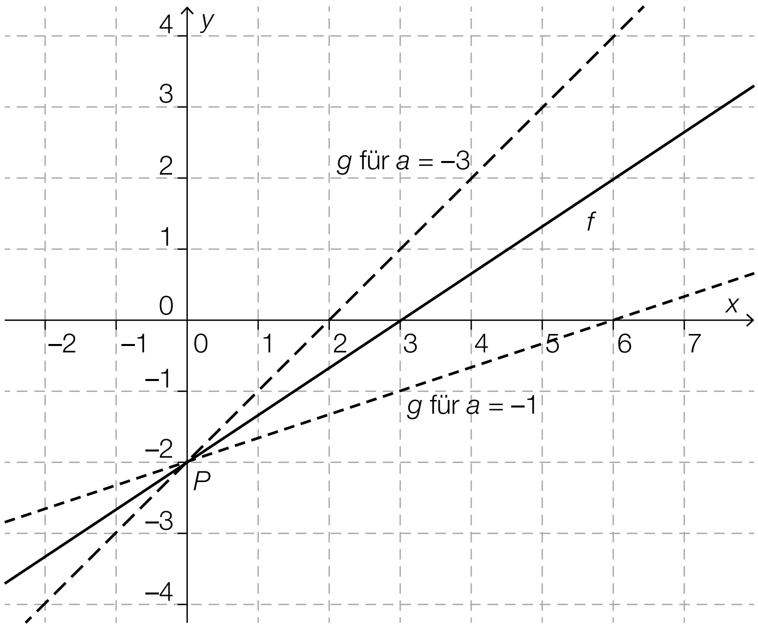
Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Für <u>jedes</u> $a \neq -2$ gibt es eine eindeutige Lösung, nämlich $x = 0$, $y = -2$.

Lösungsschlüssel:

– Es müssen <u>alle</u> Werte für a, für die das Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, angegeben werden, <u>und</u> die Lösung muss richtig berechnet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Der Parameter a bestimmt die Steigung der Geraden g.
Für $a = -2$ sind die beiden Geraden identisch. Das bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen gibt. In allen anderen Fällen schneiden die Geraden f und g einander im Punkt $P = (0|-2)$.

Lösungsschlüssel:

– Die Gerade f muss richtig dargestellt werden, das heißt, sie muss durch die Punkte $(0|-2)$ und $(3|0)$ verlaufen.
– Der Einfluss von a auf die Steigung der Geraden g muss richtig erklärt werden, wobei keine konkrete Gerade gezeichnet werden muss.
– Die Lösungsmengen müssen für die Fälle $a = -2$ und $a \neq -2$ richtig erklärt werden.

Aufgabe 2

Rechtwinkeliges Dreieck

Von einem rechtwinkeligen Dreieck kennt man die Größe eines Winkels mit 38° und die Länge der Hypotenuse mit 25 cm.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Begründen Sie, warum in einem rechtwinkeligen Dreieck die Sinus- und Cosinuswerte der Winkel nie negativ sein können!

Geben Sie an, in welchem Quadranten alle Winkel liegen, deren Sinus- und zugleich auch Cosinuswerte negativ sind! Begründen Sie Ihre Wahl (z. B. mithilfe des Einheitskreises)!

Lösung der Aufgabe 2

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

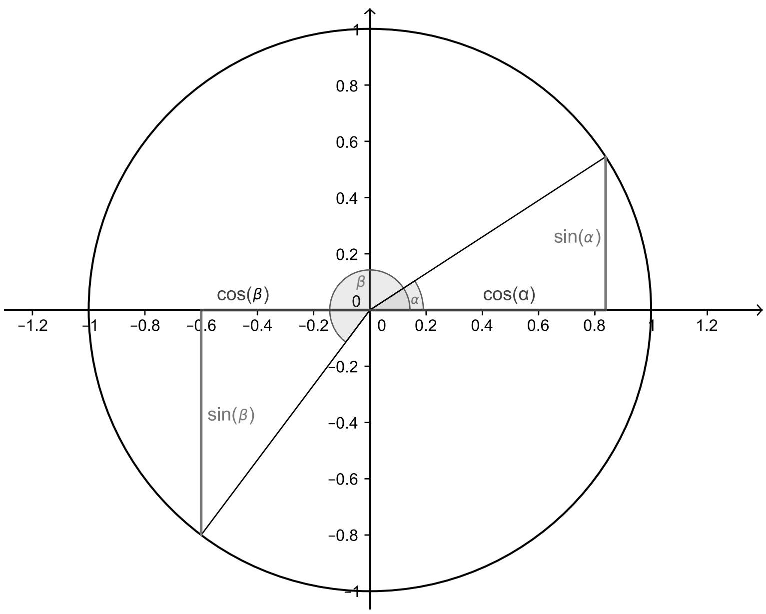
$U = 60{,}09$ cm
Berechnung der Seitenlängen z. B. mit $25 \cdot \sin(38)$ und $25 \cdot \cos(38)$

Lösungsschlüssel:

U muss aus dem Lösungsintervall [59,7; 60,2] sein. Eine Berechnung muss vorliegen, konstruktive Lösungen reichen nicht aus.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Winkel in einem rechtwinkeligen Dreieck sind ≤ 90°, liegen also im Einheitskreis im 1. Quadranten. Alle Winkel im 1. Quadranten haben positive Sinus- und Cosinuswerte.



Alle Winkel im 3. Quadranten haben negative Sinus- und Cosinuswerte.

Lösungsschlüssel:

Bei der Beantwortung der Leitfrage soll die Kandidatin/der Kandidat ...

– angeben, dass die Winkel im rechtwinkeligen Dreieck kleiner oder gleich 90° sind;
– z. B. anhand des Einheitskreises zeigen, wie man den Sinus und den Cosinus eines Winkels ablesen kann;
– zeigen, dass Winkel im 1. Quadranten nur positive Sinus- und Cosinuswerte haben;
– zeigen, dass für Winkel im 3. Quadranten die Sinus- und Cosinuswerte negativ sind.

Aufgabe 3

Pensionsvorsorge

Sebastian erbt im Alter von 45 Jahren € 25.000. Dieser Betrag wird mit einem Zinssatz von 3 % pro Jahr als Pensionsvorsorge verzinst.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Wert dieses Vermögens bei Pensionsantritt, wenn dieser im Alter von 65 Jahren erfolgen soll! Erläutern Sie Ihre Vorgangsweise!

Leitfrage:

Führen Sie ein weiteres, selbst gewähltes Beispiel aus einem anderen Kontext an, bei dem man exponentielles Wachstum zugrunde legen kann, und begründen Sie Ihre Wahl!

Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für die Verdoppelungszeit τ aus der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ her!

Erklären Sie die Bedeutung der in der gegebenen Gleichung auftretenden Parameter und Größen!

Lösung der Aufgabe 3

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

$K(20) = K_0 \cdot p^{20}$
$K_0 = 25\,000$
$p = 1{,}03$
$K(20) = 25\,000 \cdot 1{,}03^{20} \approx 45\,152{,}78$

Der Wert der Veranlagung zu Pensionsantritt beträgt € 45.152,78.

Lösungsschlüssel:

Lösungsintervall des verfügbaren Vermögens: [€ 45.000; € 45.200]

(Sinngemäß) korrekte alternative Rechenwege sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Beispiele: Bevölkerungswachstum, Bakterienvermehrung …

$$\tau = \frac{\ln(2)}{k}$$

t ... Zeit
k ... Konstante, die charakteristisch für das Wachstum ist
N_0 ... ursprünglich vorhandene Anzahl an Einwohnern, Bakterien …

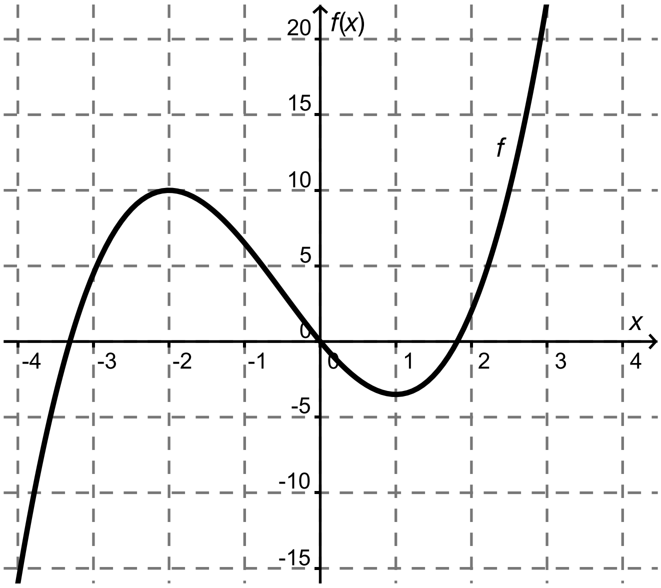
Lösungsschlüssel:

– Bei dem selbst gewählten Beispiel muss begründet werden, warum ein konstantes, prozentuelles Wachstum zugrunde liegt.
– Der Term für τ muss korrekt ermittelt werden.
– Die Bedeutung der Parameter und Größen muss sinngemäß der Lösungserwartung entsprechen.

Aufgabe 4

Differenzenquotient

Gegeben ist der Graph einer Funktion *f*.

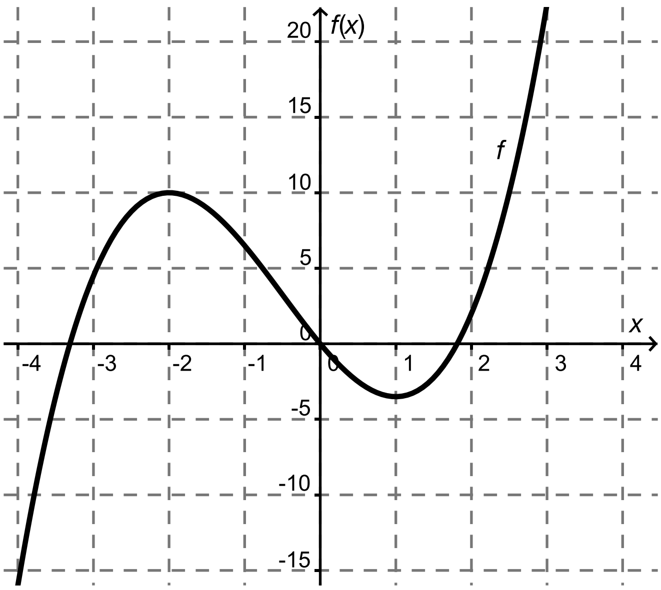


Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Differenzenquotienten von *f* im Intervall [–2; 0] und stellen Sie eine geometrische Deutung dieses Differenzenquotienten in der gegebenen Abbildung dar! Die für die Berechnung relevanten Werte sind ganzzahlig und können dem Diagramm entnommen werden.

Leitfrage:

Erklären und begründen Sie, wie man ausgehend vom Differenzenquotienten von *f* im Intervall [–2; 0] den Differenzialquotienten von *f* an der Stelle $x = 0$ bestimmen kann, und ermitteln Sie diesen Wert näherungsweise anhand des Graphen von *f*!

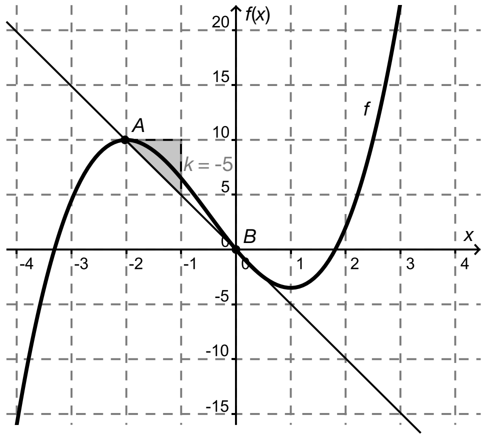


Lösung der Aufgabe 4

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$k = -\frac{10}{2} = -5$

$k = -5$ entspricht der Steigung der Sekante im Intervall [–2; 0].

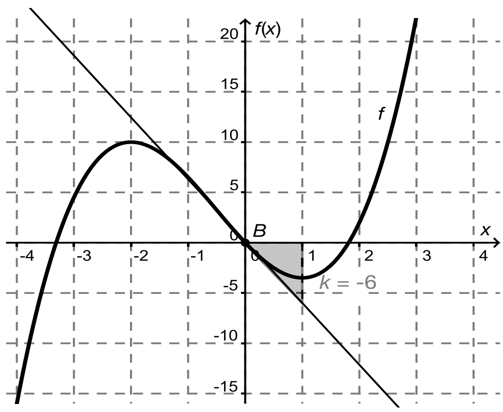


Lösungsschlüssel:

Der Differenzenquotient muss richtig berechnet und richtig gedeutet werden, und die Steigung der Sekante muss in der Abbildung richtig dargestellt bzw. erklärt werden.
Die Sekante zwischen den Punkten $A = (-2|10)$ und $B = (0|0)$ muss eingezeichnet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Steigung der Sekante im Intervall [a; 0] ist eine Näherung für die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$. Je näher a bei 0 liegt, desto besser ist diese Näherung.



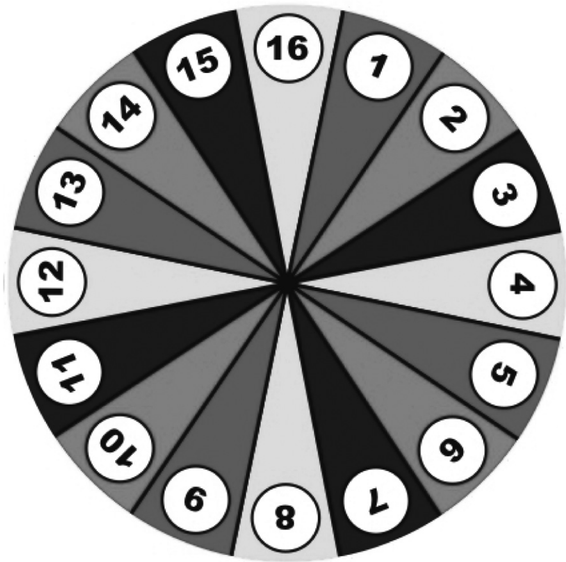
Lösungsschlüssel:

– Der Grenzübergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten muss sinngemäß richtig erklärt werden.
– Die Tangente im Ursprung muss skizziert und ihre Steigung abgelesen werden. Die abgelesene Steigung muss im Intervall [–8; –5] liegen.

Aufgabe 5

Glücksrad

Auf einem Glücksrad befinden sich die Zahlen von 1 bis 16. Das Glücksrad wird in Drehung versetzt. Befindet sich eine durch 4 teilbare Zahl an oberster Stelle des Glücksrades, so erhält man einen Gewinn.



Quelle: http://www.handelshaus-jaeger.de/foto/Gluecksrad_Bunt_Scheibe.jpg [22.05.2014]

Aufgabenstellung:

Gottfried darf drei Mal drehen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei mindestens einmal gewinnt!

Leitfrage:

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Gewinne bei dreimaligem Drehen des Glücksrades.

Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsvariablen als Säulendiagramm und erklären Sie die zugrunde liegende Verteilung!

Lösung der Aufgabe 5

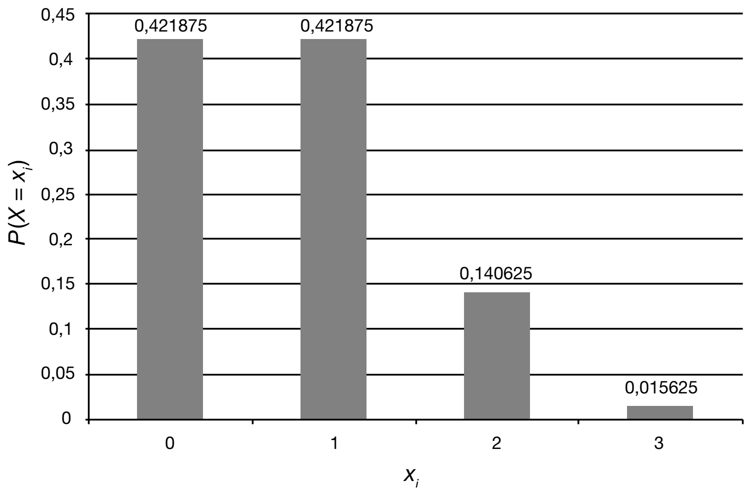
Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$P = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 57{,}81\ \%$

Lösungsschlüssel:

Lösungsintervall: [57 %; 58 %]
Eine Angabe in Dezimalschreibweise oder als Bruch ist ebenfalls zulässig.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Es handelt sich um eine Binomialverteilung:
– weil die Experimente voneinander unabhängig sind (und deswegen die Wahrscheinlichkeiten für Erfolg und Misserfolg konstant bleiben);
– weil bei jeder Wiederholung des Experiments (= des Drehens des Glücksrades) nur zwei relevante Ausgänge möglich sind (entweder man gewinnt oder man gewinnt nicht).

Lösungsschlüssel:

Es müssen die Gewinnwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ mit $x_i = 0, 1, 2, 3$ ermittelt werden. Die Ergebnisse sind graphisch als Säulendiagramm darzustellen.

Lösungsintervalle der errechneten Wahrscheinlichkeiten:

$P(X = 0)$: [0,42; 0,43]
$P(X = 1)$: [0,42; 0,43]
$P(X = 2)$: [0,14; 0,15]
$P(X = 3)$: [0,01; 0,02]

Angaben in Prozent- oder in Bruchschreibweise sind ebenfalls zulässig.

Es muss die Verteilung mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerten korrekt wiedergegeben werden. Darüber hinaus müssen beide Argumente der Begründung der Binomialverteilung korrekt angegeben werden.